JOURNAL DE PHYSIQUE *Colloque* C3, *supplément au n°* 8, *Tome* 38, *Août* 1977, *page* C3-213

APPROXIMATION DES PHASES ALÉATOIRES ET DE L'ÉLARGISSEMENT DE RÉSONANCE EN TURBULENCE FAIBLE DES PLASMAS

D. PESME, G. LAVAL et R. PELLAT

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, France

Résumé. — Nous étudions d'abord comme modèles d'équations de turbulence faible des équations stochastiques de la forme $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\mathbf{a} = \gamma_0 \overline{\overline{S}}.\mathbf{a}$; $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}$ est un opérateur différentiel linéaire sûr, S une fonction stochastique donnée. Les équations de Dyson et Bethe-Salpeter donnent l'évolution de $\langle \mathbf{a} \rangle$ et $\langle \mathbf{aa}^* \rangle$. Dans le cas purement temporel où S est caractérisé par un temps de corrélation τ_c, nous retrouvons la condition de validité de l'approximation dite de Bourret $\gamma_0^2 \tau_c^2 \langle | S |^2 \rangle \ll 1$.

Nous considérons ensuite le cas spatio-temporel avec les 2 exemples suivants : i) la théorie quasi linéaire : en supposant le champ électrique extérieurement donné et dans les conditions de turbulence faible $\omega_b^2 \tau_c^2 \ll 1$, nous montrons que d'une part la théorie linéaire non renormalisée ne diverge pas, et que d'autre part il n'est pas consistant de retenir les termes d'élargissement de résonance. Ces termes apparaissent d'ailleurs naturellement sans renormalisation dans les équations de la fonction de corrélation et ne sont autres que ceux de l'effet Landau non linéaire. ii) Les instabilités paramétriques en présence de turbulence. Dans ce cas nous pouvons établir exactement les conditions de validité de l'approximation de Bourret dans le cas spatio-temporel. Nous montrons en particulier qu'il existe des cas où elle n'est pas valide, aussi petit que soit le temps de corrélation. Nous établissons aussi de façon précise les équations dites des *phases aléatoires*. Nous montrons que le comportement de l'interaction entre ondes ne peut pas être décidé *a priori* de type cohérent ou incohérent mais dépend de la nature de l'instabilité considérée et peut être différent pour $\langle a \rangle$ et $\langle aa^* \rangle$.

Abstract. — First we study stochastic equations of the form $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}.\mathbf{a} = \gamma_0 \overline{\overline{S}}.\mathbf{a}$ as a model describing weak turbulence ($\overline{\overline{\mathfrak{L}}}$ is a non random differential operator, $\overline{\overline{S}}$ is a given stochastic function). The evolutions of $\langle \mathbf{a} \rangle$ and $\langle \mathbf{aa}^* \rangle$ are given by Dyson and Bethe-Salpeter equations. In the purely temporal case, with τ_c as the characteristic autocorrelation time of S, we recover the validity conditions of the so-called Bourret approximation $\gamma_0^2 \tau_c^2 \langle | S |^2 \rangle \ll 1$.

Next, we consider the space and time case with the two following problems : i) the quasi-linear theory : when the electric field is considered as externally given, and in the frame of the weak turbulence theory $\omega_b^2 \tau_c^2 \ll 1$, we establish that no divergence and no secular term occur ; moreover we show that the resonance broadening terms cannot be self-consistently retained at this order of the theory. On the other hand, these terms appear without any renormalization in the study of the correlation function and are identified to non linear Landau damping. ii) Parametric instabilities in the presence of turbulence. In this problem we are able to establish exactly the validity conditions of the Bourret approximation in the space and time case. We show that this approximation is not always valid, whatever small the correlation time. We establish in a precise way the usual Random-phase equations. The behaviour of the waves is then shown to be either coherent or incoherent depending on the type of the instability. For absolute instability a significant difference is also found between $\langle a \rangle$ and $\langle aa^* \rangle$.

1. **Introduction.** — La plupart des équations apparaissant en turbulence plasma s'écrivent sous la forme symbolique

$$\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\mathbf{a} = \mathbf{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{a})\,; \tag{1}$$

a est la quantité physique étudiée, $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}$ et **Q** sont respectivement des opérateurs linéaires et quadratiques. L'équation de Vlasov présente cette non-linéarité quadratique. Les équations de couplage d'onde et l'équation de Schrodinger non linéaire régissant la formation de solitons et de collapses peuvent aussi s'écrire matriciellement sous la forme (1). En considérant des situations turbulentes, nous supposons que l'état du système est physiquement bien décrit par des valeurs moyennes telles que $\langle a \rangle$, $\langle aa \rangle$ ... A cause de la non-linéarité de l'éq. (1), ces moments sont couplés entre eux et on est donc ramené à un problème de troncature d'une hiérarchie infinie d'équations. Une autre façon de procéder consiste à écrire la solution comme la somme d'une série infinie de diagrammes. On est alors amené à resommer certaines sous-classes de diagrammes.

En turbulence fluide [1], diverses solutions ont été proposées pour les équations de Navier-Stokes qui ont bien la forme (1). Kraichnan a préconisé qu'un des critères de troncature d'équation ou de resommation de sous-classes de diagrammes soit la réalisabilité de la solution : à cette condition la solution assure automatiquement la préservation de certaines quantités physiques, telles que la positivité de l'énergie. En turbulence fluide, qui est une situation de turbulence forte dans un sens que nous définirons plus loin, les approximations faites sont guidées essentiellement par ces considérations et par la confrontation avec l'expérience, réelle ou numérique.

La turbulence plasma peut au contraire présenter un caractère essentiellement différent : c'est celui de la turbulence faible dans lequel les modes propres d'oscillation interagissent entre eux et avec les particules sans que les propriétés linéaires du milieu soient modifiées. Nous verrons que nous disposons alors d'un petit paramètre K_b qui permet un développement systématique des équations à un ordre donné. Pour illustrer simplement cette propriété de la turbulence plasma, nous considérons à la place de l'éq. (1) une version linéarisée du vrai problème :

$$\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\mathbf{a} = \gamma_0\, \overline{\overline{S}}.\mathbf{a} \tag{2}$$

S est alors un champ stochastique donné et nous étudions les propriétés moyennes de $\mathbf{a}$. Pour la simplicité aussi, nous nous limitons à des problèmes unidimensionnels.

Considérons par exemple le couplage de trois ondes $a_i(x, t)$ avec $i = 0, 1, 2$ où l'onde a_0 est une onde de grande amplitude qui se désintègre en deux ondes a_1 et a_2. Les équations du couplage s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} D_0\, a_0 &= -\, V a_1\, a_2^* \\ D_1\, a_1 &= V a_0\, a_2 \\ D_2\, a_2 &= V a_0^*\, a_1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

avec

$$D_i \equiv (\partial_t + \nu_i + V_i\, \partial_x)\,,$$

ν_i et V_i étant l'amortissement linéaire et la vitesse de groupe de l'onde a_i. L'approximation paramétrique consiste à négliger la réaction sur l'onde de pompe des ondes filles 1 et 2 supposées petites dans la phase linéaire de l'instabilité ; à l'ordre le plus bas on est alors conduit [2] à un système d'équations de la forme (2) :

$$\left.\begin{aligned} D_1\, a_1 &= \gamma_0\, S(t - x/V_0)\, a_2 \\ D_2\, a_2 &= \gamma_0\, S^*(t - x/V_0)\, a_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

nous avons posé

$$V a_0 = \gamma_0\, S(t - x/V_0)\,.$$

S est la variable stochastique normalisée de façon à ce que l'énergie de la pompe soit proportionnelle à

$$\gamma_0{}^2 : \langle\, S(t)\, S^*(t)\, \rangle = 1\,.$$

On suppose aussi $\langle\, S(t)\, \rangle = 0$, qui traduit une répartition aléatoire de la phase de l'onde de pompe. Enfin les propriétés stochastiques de la variable S sont essentiellement décrites par sa fonction de corrélation $\Phi(\tau) = \langle\, S(t)\, S^*(t + \tau)\, \rangle$ qui décroît de 1 à 0 sur un temps caractéristique τ_c.

Prenons maintenant pour second exemple l'équation de Vlasov [3]. Sa non-linéarité provient du champ électrique E relié à la fonction de distribution f par l'équation de Poisson. Le champ électrique ne fait intervenir que l'intégrale sur les vitesses de la fonction de distribution, c'est-à-dire une propriété moyenne de f : une façon de linéariser le problème est alors d'écrire d'une part l'équation de Vlasov en considérant le champ électrique comme donné :

$$(\partial_t + v\, \partial_x)\, f = -\frac{q}{m} E(x, t)\, \partial_v\, f \tag{5}$$

et d'autre part se donner les propriétés stochastiques de E sous la forme suivante :

$$E(x, t) = \int \mathrm{d}k E_k(t) \exp\left\{ ikx - i \int_0^t \omega_k(t')\, \mathrm{d}t' \right\} \tag{6}$$

avec

$$\langle\, E_k\, E_{k'}\, \rangle = \delta(k + k')\, N_k\,; \tag{7}$$

$\omega_k(t)$ est la partie réelle de la fréquence solution de la relation de dispersion $\varepsilon(\omega_k, k) = 0$ obtenue avec $\langle\, f(t)\, \rangle$. En écrivant symboliquement

$$-\frac{q}{m} E\, \partial_v \equiv \gamma_0\, S$$

on voit que l'éq. (5) est aussi de la forme

$$\overline{\overline{\mathfrak{L}}}\mathbf{a} = \gamma_0\, \overline{\overline{S}}\mathbf{a}\,. \tag{2}$$

Le problème étant linéaire nous introduisons la fonction de Green $\overline{\overline{G}}$ donnée

$$\overline{\overline{\mathfrak{L}}}.\overline{\overline{G}} = \delta(t)\, \delta(x - x_0)\, \overline{\overline{I}} + \gamma_0\, \overline{\overline{S}}.\overline{\overline{G}} \tag{8}$$

où $\overline{\overline{I}}$ désigne la matrice identité.

2. **Approximation de Bourret.** — Les équations que l'on rencontre dans les problèmes de propagation en milieu aléatoire sont de la forme (8) où S représente l'indice fluctuant du milieu. Si le milieu est statique on peut effectuer une transformation de Fourier sur le temps et le problème ne contient alors que la variable d'espace x. L'approximation habituelle sur des équations du type (8) à une seule variable est l'approximation dite de *Bourret* [4].

Pour l'illustrer, considérons l'équation :

$$\partial_t G = \delta(t) + \gamma_0 S(t) G(t) . \tag{9}$$

L'approximation de Bourret consiste à itérer une fois l'équation, la moyenner :

$$\partial_t \langle G \rangle = \delta(t) + \gamma_0^2 \int_0^t \langle S(t) S(t') G(t') \rangle \, \mathrm{d}t'$$

et tronquer la moyenne comme suit :

$$\partial_t \langle G \rangle \simeq \delta(t) + \gamma_0^2 \int_0^t \langle S(t) S(t') \rangle \langle G(t') \rangle \, \mathrm{d}t' \tag{10}$$

Frisch [5] et Brissaud et Frisch [6], ont donné les conditions de validité de cette approximation. Ils ont introduit le nombre de Kubo $K_b = \gamma_0 \tau_c$ et la condition de validité s'écrit

$$K_b \ll 1 . \tag{11}$$

Le taux de croissance caractéristique de $\langle G \rangle$ est $\gamma \simeq \gamma_0^2 \tau_c$ et la condition (11) exprime donc que $\langle G \rangle$ évolue lentement sur un temps de corrélation : $\gamma \tau_c \ll 1$.

Les problèmes qui nous intéressent sont essentiellement *spatio-temporels*. Les conditions de validité de la généralisation de l'approximation de Bourret à ces problèmes ne peuvent pas s'obtenir trivialement. En effet l'approximation de Bourret est une conséquence du fait que $\langle G \rangle$ varie lentement par l'effet d'un grand nombre de petites variations élémentaires pendant des temps très courts : $G(t)$ est donc rapidement décorrélé du passé de $S(t')$ pour $t - t' \gg \tau_c$, ce qui justifie la troncature menant à (10). Les problèmes spatio-temporels font eux intervenir la propagation de G et de S de sorte que l'approximation de Bourret suppose une décorrélation à la fois dans le temps et dans l'espace. Nous allons montrer précisément au paragraphe suivant un exemple dans lequel les décorrélations en temps à x fixé et en espace à t fixé sont vérifiées pour $| t - t' | \gg \tau_c$ et $| x - x' | \gg l_c = V_0 \tau_c$ bien qu'au cours de la propagation, la décorrélation nécessaire pour l'approximation (10) ne soit pas réalisée.

Les méthodes diagrammatiques ont l'avantage d'être générales et de pouvoir traiter avec le même formalisme aussi bien le cas purement temporel que le cas spatio-temporel.

Considérons à nouveau l'exemple simple :

$$\partial_t G = \delta(t) + \gamma_0 S(t) G(t) . \tag{9}$$

Introduisons le projecteur libre G_0 donné par l'équation $\partial_t G_0 = \delta(t)$.

L'éq. (9) peut être intégrée et itérée, et on obtient :

$$G(t) = G_0 + \gamma_0 G_0 * SG_0 + \\ + \gamma_0^2 G_0 * SG_0 * SG_0 + \cdots . \tag{12}$$

En notant par convention $G_0 = —$, l'éq. (12) s'écrit :

$$G = — + \gamma_0 — S — + \gamma_0^2 — S — S — + \cdots .$$

La moyenne de l'éq. (12) fait intervenir la moyenne de termes $\langle — S — S — \cdots — S — \rangle$; par simplicité supposons le processus S Gaussien ; on a alors

$$\langle S(1) S(2) \dots S(2n) \rangle = \sum_{\{i,j\}} (\Pi \varphi_{ij})$$

où

$$\varphi_{ij} = \langle S(i) S(j) \rangle ;$$

on note symboliquement

$$\varphi_{ij} = \overline{S(i) \quad S(j)}$$

et on obtient donc :

$$\langle G \rangle = — + \gamma_0^2 — \overline{S — S} — + \gamma_0^4 \times \\ \times \left\{ — \overline{S — \overline{S — S} — S} — + — \overline{S — S} — \overline{S — S} \right. \\ \left. + — S — S — S — S — \right\} + \cdots . \tag{13}$$

On a effectué ainsi un développement de $\langle G \rangle$ en puissance de γ_0^2. Le second membre ne fait intervenir que les *conditions initiales* et contient tous les graphes possibles. Ce développement est équivalent à l'équation de Dyson :

$$\langle G \rangle = — + — M \langle G \rangle \tag{14}$$

dans lequel c'est maintenant l'opérateur M, appelé opérateur de masse, qui est développé en puissance de γ_0^2

$$M = \gamma_0^2 \overline{S - S} + \gamma_0^4 \times \\ \times \left\{ \overline{S — \overline{S — S} — S} + S — S — S — S \right\} + \cdots$$

M est la somme des graphes connexes uniquement. L'équivalence entre les éq. (12) et (14) (cf. Frisch [5]) provient du développement de l'éq. (14) :

$$\langle G \rangle = — + — \left(\sum_1^\infty M^n \right) —$$

qui est formellement identique à (12). Dans le cas non Gaussien M est la somme de tous les graphes irréductibles connexes.

L'approximation de Bourret consiste alors à ne garder que le premier terme dans le développement de M de sorte que l'éq. (14) devient :

$$\langle G \rangle = — + \gamma_0^2 — \overline{S — S} \langle G \rangle \tag{15}$$

qui est équivalente à l'éq. (10).

La condition de validité de l'approximation s'obtient en écrivant que la somme des autres graphes est petite : un graphe d'ordre $2n$ s'écrit

$$\gamma_0^{2n} - S(t_1) - S(t_2) \dots \quad - S(t_{2n}) \langle G(t_{2n}) \rangle .$$

Comme la fonction $\varphi(t_i - t_j) = \overline{S(t_i) S(t_j)}$ est non nulle pour $| t_i - t_j | \lesssim \tau_c$, les variables d'intégration varient sur un intervalle de taille τ_c et l'ordre de grandeur de ce graphe est donc $\gamma_0^{2n} \tau_c^{2n-1}/\gamma$ où γ désigne le taux de croissance de $\langle G \rangle$: γ est donné par le graphe conservé $\gamma \simeq \gamma_0^2 \tau_c$ et on trouve donc que si la condition de validité $K_b = \gamma_0 \tau_c \ll 1$ est satisfaite, les graphes d'ordre $2n$ sont d'ordre K_b^{2n-2}. Ceci est une conséquence de deux choses :

1) Le caractère connexe des graphes : les graphes non connexes comme ceux apparaissant dans le développement en conditions initiales (13) sont d'ordre $K_b^0 = 1$.

2) Les arguments des fonctions S restent ordonnés en temps.

En prenant pour fonction de corrélation

$$\varphi(\tau) = \exp(- \Delta\omega_0 \, | \tau |)$$

nous avons pu montrer que non seulement la série des termes négligés était convergente mais aussi que sa somme tendait vers 0 avec K_b de sorte que l'approximation de Bourret devient exacte dans le cas du bruit blanc.

3. **Valeur moyenne de $\langle a \rangle$ pour les instabilités paramétriques.** — Considérons maintenant des problèmes spatio-temporels de la forme (8) à l'aide de l'équation de Dyson. Le formalisme reste le même, $\overline{\overline{G}}_0$ étant maintenant le propagateur libre solution de l'équation

$$\overline{\overline{\mathfrak{L}}} . \overline{\overline{G}}_0 = \delta(t) \, \delta(x - x_0) \overline{\overline{I}} .$$

Dans le cas des équations de couplage de mode, on obtient :

$$\langle a_1 \rangle = \underline{g_1^0} + \underline{g_1^0} M_1 \langle a_1 \rangle \tag{16}$$

dans laquelle

$$M_1 = \gamma_0^2 \overline{S \, \underline{g_2^0} \, S^*} + \gamma_0^4 \, S \, \underline{g_2^0} \, S^* \, \underline{g_1^0} \, S \, \underline{g_2^0} \, S^* + \cdots \tag{17}$$

et où on introduit les propagateurs g_i^0 solutions de

$$D_i \, g_i^0 = \delta(t) \, \delta(x - x_0) .$$

En ne gardant que le premier graphe du développement (17) et en appliquant D_1 à l'éq. (16) on obtient pour $\langle a_1 \rangle$ l'équation approchée :

$$\begin{aligned} D_1 \langle a_1(x, t) \rangle &= a_1(x, t = 0) \, \delta(t) + \\ &+ \gamma_0^2 \int_0^t \mathrm{d}t' \exp[- \nu_2(t - t')] \\ &\times \varphi \left[\left(1 - \frac{V_2}{V_0} \right) (t - t') \right] \langle a_1(x', t') \rangle \end{aligned} \tag{18}$$

où

$$x' = x - V_2(t - t') .$$

Par simplicité prenons

$$\varphi(\tau) = \exp - \Delta\omega_0 \, | \tau | ;$$

on voit alors que l'incohérence de l'onde de pompe a pour effet de remplacer ν_2 par

$$\nu_2 + \Delta\omega_0 \left| 1 - \frac{V_2}{V_0} \right| ;$$

l'éq. (18) est équivalente au système :

$$\left. \begin{aligned} D_1 \langle a_1 \rangle &= a_1 \, (x, t = 0) \, \delta(t) + \gamma_0 \, \alpha_2 \\ \left(D_2 + \Delta\omega_0 \left| 1 - \frac{V_2}{V_0} \right| \right) \alpha_2 &= \qquad \gamma_0 \langle a_1 \rangle \end{aligned} \right\} . \tag{19}$$

Ce système a la forme de celui gouvernant les instabilités paramétriques dans lequel on augmente l'amortissement dans la deuxième équation ; α_2 est une variable auxiliaire de valeur initiale nulle. Le système donnant l'évolution de $\langle a_2 \rangle$ est semblable, mais dans lequel on remplace ν_1 par

$$\nu_1 + \Delta\omega_0 \left| 1 - \frac{V_1}{V_0} \right|$$

on remarque la dissymétrie [7] entre $\langle a_1 \rangle$ et $\langle a_2 \rangle$. En particulier l'une des valeurs moyennes des ondes excitées peut être instable sans que l'autre le soit. Cela montre donc que dans ces problèmes d'instabilité il est nécessaire d'étudier les valeurs quadratiques, proportionnelles à l'énergie.

La condition de validité s'obtient comme nous l'avons fait sur l'exemple précédent : pour chaque graphe d'ordre $2n$ on estime les domaines d'intégration des variables t_i apparaissant dans le développement en temps ordonné (17). Un graphe d'ordre $2n$ s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} &\gamma_0^{2n} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \dots \int_0^{t_{2n-1}} \mathrm{d}t_{2n} \times \\ &\qquad \times S(T_1) \, S^*(T_2) \dots S^*(T_{2n}) \dots \\ &\exp - [\nu_1(t - t_1) + \nu_2(t_1 - t_2) + \cdots + \nu_2(t_{2n-1} - t_{2n})] \times \\ &\qquad \times \langle a_1(X_{2n}, T_{2n}) \rangle \end{aligned}$$

avec

$$T_j = t_j - X_j/V_0$$

où

$$X_j = x - V_1(t - t_1) - V_2(t_1 - t_2) \dots - V_j(t_{j-1} - t_j)$$

et $V_j = V_1$ si j est impair, $V_j = V_2$ si j est pair.

Deux cas sont alors à distinguer :

1) *Cas* $(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) > 0$. — Les arguments T_j des fonctions S restent alors ordonnés comme t_j : à nouveau la connexité des graphes et l'ordonnancement des variables T_j permettent une estimation directe du diagramme : il est d'ordre K_b^{2n-2}

$$K_b^2 = \frac{\gamma_0^2 \tau_c^2 \langle | S |^2 \rangle}{\left|1 - \frac{V_1}{V_0}\right| \left|1 - \frac{V_2}{V_0}\right|} = \frac{\gamma_0^2 l_c^2 \langle | S |^2 \rangle}{| V_0 - V_1 | | V_0 - V_2 |} \tag{20}$$

où τ_c et l_c sont les temps et longueur de corrélation de la fonction

$$\varphi(\xi, \tau) = \langle S(x + \xi, t + \tau) S^*(x, t) \rangle .$$

On trouve donc une généralisation [8] du nombre de Kubo au cas spatio-temporel, faisant apparaître les vitesses de groupe des trois ondes, et la condition de validité s'écrit

$$K_b \ll 1 . \tag{21}$$

2) *Cas* $(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) < 0$. — Cette fois les arguments T_j ne sont plus ordonnés comme t_j et à tout ordre n il existe au moins un graphe de même ordre de grandeur que le premier de sorte que la somme de la série restante ne tend plus vers 0 avec K_b.

Les équations de Dyson ont été déjà largement employées pour résoudre des équations stochastiques linéaires aux dérivées partielles. Notre exemple montre que l'approximation de Bourret n'est licite que si les arguments des fonctions stochastiques apparaissant dans les diagrammes de l'opérateur de masse restent bien ordonnés.

Dans notre exemple particulier d'instabilité paramétrique nous imposons cependant une condition supplémentaire sur les graphes connexes à retenir : nous supposons $\langle S(t) S(t') \rangle = 0$ pour tout t, t'. Cela traduit à nouveau une répartition aléatoire des phases de l'onde de pompe. Conservant uniquement les graphes connexes ne faisant intervenir que des fonctions de corrélation $\langle S(T_i) S^*(T_j) \rangle$, on trouve à nouveau que les graphes d'ordre 2 n sont en K_b^{2n-2} et la condition de validité (21) en découle.

4. **La théorie quasi linéaire.** — L'étude précédente se retranspose directement à la théorie quasi linéaire.

L'équation de Vlasov

$$(\partial_t + v\, \partial_x) f = - \frac{q}{m} E\, \partial_v f \tag{5}$$

ne fait intervenir que la seule vitesse v de sorte que (5) a la même forme que (4) avec la substitution

$$a_1 = a_2 \to f(x, v, t) , \qquad \gamma_0 S \to - \frac{q}{m} E\, \partial_v ,$$

$$V_1 = V_2 \to v \quad \text{et} \quad V_0 \to V_g$$

où V_g désigne la vitesse de groupe des ondes excitées.

Nous considérons une turbulence haute fréquence excitée par exemple par une instabilité faisceau-plasma à faisceau chaud. L'analogue de l'éq. (18) s'écrit :

$$(\partial_t + v\, \partial_x) \langle f(x, v, t) \rangle = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \partial_v \times$$
$$\times \int_0^t \mathrm{d}t' \langle E(x, t) E(x - v(t - t'), t') \rangle$$
$$\times\ \partial_v \langle f(x - v(t - t'), t') \rangle \tag{22}$$

en explicitant l'éq. (22) à l'aide de l'expression (6) on obtient la forme habituelle des équations quasi linéaires non renormalisées [9] :

$$(\partial_t + v\, \partial_x) \langle f \rangle = \partial_v D(v)\, \partial_v \langle f \rangle \tag{23}$$

avec

$$D(v) = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \pi \int N_k(t)\, \delta(\omega_k - kv)\, \mathrm{d}k \tag{24}$$

dans le domaine des vitesses résonnantes et

$$D(v) = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \int \frac{\frac{1}{2}(\partial_t N_k(t))}{(\omega_k - kv)^2}\, \mathrm{d}k$$

pour les vitesses non résonnantes.

Pour transposer les résultats de l'exemple précédent, nous sommes dans le cas

$$(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) = (V_g - v)^2 > 0$$

et la condition de validité est simplement donnée par les expressions (20) et (21) qui s'écrivent ici :

$$K_b^2 = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{\langle E^2 \rangle\, l_c^2}{\langle \Delta v^2 \rangle\, | v - V_g |^2}$$
$$= \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{\langle E^2 \rangle}{\langle \Delta v^2 \rangle} \tilde{\tau}_c^2 \tag{25}$$

où $\tilde{\tau}_c$ est le temps de cohérence du champ vu par les particules résonnantes. En introduisant

$$\omega_b^2 = \frac{q}{m} \bar{k} E$$

où $\bar{k}$ est le nombre d'ondes caractéristiques de la turbulence excitée on a

$$K_b^2 = \omega_b^4\, \tilde{\tau}_c^4$$

et la condition de validité de la théorie quasi linéaire

$$\omega_b^2\, \tilde{\tau}_c^2 \ll 1$$

exprime donc qu'il n'y a pas piégeage des particules dans l'onde [10]. Cette inégalité définira pour la suite ce que nous appelons turbulence faible.

5. **Non-divergence et non-sécularité.** — Une simple transposition de ce qui a été dit au paragraphe 3 assure la validité de l'approximation quasi linéaire sachant que nous sommes dans le cas

$$(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) = (V_g - v)^2 > 0 .$$

Cependant une grande confusion existe encore à ce sujet dans la littérature [11]. Trois objections sont souvent soulevées contre la théorie quasi linéaire :

1) Les termes négligés (couplage de modes) sont du même ordre que ceux retenus.

2) Des termes séculaires apparaissent lors de l'itération en puissance du champ. Dans le terme d'ordre 4 écrit symboliquement EEEE il existe des termes donnant des sécularités : par exemple

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{d}t_1 \exp[-i(\omega_k - kv)\,t_1] \times \\ \times \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \exp[-i(\omega_{k'} - k'v)\,t_2] \\ \times \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_3 \exp[+i(\omega_{k'} - k'v)\,t_3] \\ \times \int_0^{t_3} \mathrm{d}t_4 \exp[+i(\omega_k - kv)\,t_4] .\end{aligned}$$

Par simplicité nous avons écrit $\omega_k\, t$ à la place de

$$\int_0^t \omega_k(t')\,\mathrm{d}t' .$$

3) L'action de l'opérateur ∂_v dans l'itération produit aussi des termes séculaires :

$$\begin{aligned}\partial_v \int_0^t \exp[-i(\omega_k - kv)\,t_1]\,\mathrm{d}t_1 = \\ = \int_0^t ikt_1 \exp[-i(\omega_k - kv)\,t_1]\,\mathrm{d}t_1 .\end{aligned}$$

Nous allons voir que la première objection provient d'une mauvaise estimation des termes négligés ; quant aux deux autres elles n'existent plus après sommation sur le spectre en k des ondes excitées.

La mauvaise estimation de la validité de la théorie quasi linéaire est la conséquence d'une démonstration simplifiée qui peut se résumer ainsi sur l'exemple suivant :

Soit à nouveau l'équation :

$$\partial_t G = \delta(t) + \gamma_0\, S(t)\, G(t) . \tag{9}$$

On obtient immédiatement en écrivant

$$G = \langle G \rangle + \delta G$$

le système :

$$\begin{cases} \partial_t \langle G \rangle = \delta(t) + \gamma_0 \langle S\,\delta G \rangle & (26a) \\ \partial_t\, \delta G \quad = \gamma_0\, S \langle G \rangle + \gamma_0[S\,\delta G - \langle S\,\delta G \rangle] . & (26b) \end{cases}$$

En négligeant les termes dits de *couplage de modes* dans l'éq. 26*b* $[S\,\delta G - \langle S\,\delta G \rangle]$ et en intégrant cette équation on obtient bien l'équation de Bourret (10). On serait alors tenté de dire que la validité de cette approximation est

$$\langle \delta G^2 \rangle \ll \langle G \rangle^2 . \tag{27}$$

Cependant supposons S Gaussien et prenons la limite $\tau_c \to 0$, $\gamma_0 \to +\infty$ avec $\gamma_0^2\,\tau_c = \gamma$ constant. Le nombre de Kubo devient nul et l'approximation de Bourret est alors exacte :

$$\langle G \rangle = \exp[\gamma t] \quad \text{et} \quad \langle G^2 \rangle = \exp[4\,\gamma t] .$$

Cela montre que pour

$$t \gg \gamma^{-1} \text{ on a } \langle \delta G^2 \rangle \simeq \langle G^2 \rangle \gg \langle G \rangle^2 ;$$

ainsi l'inégalité (27) est violée alors que l'équation est exacte. En ramenant la validité de l'approximation quasi linéaire :

$$\langle \delta G^2 \rangle \ll \langle G \rangle^2$$

on a oublié que les termes d'ordre supérieurs proviennent de l'expression $[S\,\delta G - \langle S\,\delta G \rangle]$ dans l'éq. (26*b*) et que ces termes lorsqu'on itère l'éq. (26*b*) ne donnent que des graphes connexes dans l'opérateur de masse. En écrivant simplement

$$\langle \delta G^2 \rangle \ll \langle G \rangle^2$$

on a perdu le caractère connexe des graphes et on a vu qu'effectivement des graphes non connexes étaient tous du même ordre. La bonne estimation est donc celle que nous avons faite et elle mène à $K_b \ll 1$.

Considérons maintenant le graphe d'ordre 4 apparaissant dans l'équation de Dyson, par exemple :

$$E - E - E - E .$$

Oublions pour l'instant l'action des opérateurs ∂_v. En explicitant ce terme on obtient :

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}k\,\mathrm{d}k'\,N_k\,N_{k'} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_3 \times \\ \times \exp[-i(\omega_k - kv)(t - t_2)] \\ \times \exp[-i(\omega_{k'} - k'v)(t_1 - t_3)] .\end{aligned}$$

Si l'on n'effectuait pas l'intégration en k et k', les intégrales en temps donneraient bien des termes séculaires mais en procédant ainsi on ne tiendrait pas compte de l'hypothèse de large spectre des ondes excitées qui est une condition necessaire pour satisfaire $K_b \ll I$. En permutant au contraire les intégrations on obtient

$$\int_0^t \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_3 \int \mathrm{d}k\, N_k \times$$
$$\times \exp[-\, i(\omega_k - kv)(t - t_2)] \int \mathrm{d}k'\, N_{k'}$$
$$\times \exp[-\, i(\omega_{k'} - k'v)(t_1 - t_3)]$$

et en remarquant que

$$\int \mathrm{d}k N_k \exp[-\, i(\omega_k - kv)\,\tau] = \varphi(\tau)$$

est une fonction de corrélation qui décroît vers zéro sur un temps caractéristique

$$\tilde{\tau}_c = \frac{1}{\Delta k \mid v - V_g \mid},$$

l'ordre de grandeur du graphe est facilement estimé à $\varphi^2_{(0)}\, \tau^3_c$ au lieu terme séculaire $\varphi^2_{(0)}\, \tau^2_c\, t$. De la même façon l'action de l'opérateur ∂_v donne un terme

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \bar{k} \tau \varphi(\tau)$$

de grandeur caractéristique $\bar{k}\tilde{\tau}_c\, \varphi(0)$. Dans l'estimation d'un graphe l'effet de ∂_v est donc de remplacer $1/\Delta v$ par $\bar{k}\tilde{\tau}_c$ qui sont l'un et l'autre du même ordre de grandeur : les diagrammes d'ordre 2 n sont donc de taille K_b^{2n-2} et aucune sécularité n'apparaît.

6. **La renormalisation.** — L'équation de Dyson

$$\langle G \rangle = - + - \underset{(-)}{M} \langle G \rangle \tag{28}$$

est une équation formelle exacte dans laquelle l'opérateur de masse $\underset{(-)}{M}$ est une somme infinie de diagrammes s'écrivant à l'aide du propagateur libre —. Cependant il existe une infinité d'équations formelles semblables qui, une fois développées redonnent la série initiale (13). Une façon de faire consiste à choisir un autre propagateur avec lequel l'opérateur de masse puisse se réécrire. Donnons par exemple le propagateur de Kraichnan défini par l'équation

$$\sim\; = - + - \overline{S \sim S} \sim . \tag{29}$$

L'équation donnant $\langle G \rangle$ s'écrit alors :

$$\langle G \rangle = \sim + \sim \underset{(\sim)}{M'} \langle G \rangle \tag{30}$$

$\underset{(\sim)}{M'}$ est le même opérateur que celui apparaissant dans l'équation de Dyson mais dans lequel on a fait l'opération de réduction suivante : on remplace d'abord $\overline{S - S}$ par — autant de fois qu'il est possible, puis on écrit $\sim$ au lieu de —. Ainsi :

$$M' = \gamma_0^4\, S \sim S \sim S \sim S\, +$$
$$+\, \gamma_0^6\, S \sim S \sim S \sim S \sim S \sim S + \cdots$$

L'éq. (30) est une équation formelle exacte, le problème étant à nouveau d'approximer $\underset{(\sim)}{M'}$. La théorie quasi linéaire renormalisée consiste à écrire $\langle G \rangle \simeq \sim$. L'éq. (29)

$$\sim\; = - + - \overline{S \sim S} \sim$$

a la même forme que celle de la théorie quasi linéaire

$$(Q.L) = - + - \overline{S - S}(Q.L)$$

dans laquelle on aurait *habillé* [12] les trajectoires libres des particules (—) par la turbulence ($\sim$).

En turbulence faible il n'est pas consistant de garder dans la théorie quasi linéaire renormalisée les termes différents de ceux de la théorie quasi linéaire simple : en effet il est facile de voir que le propagateur de Kraichnan

$$\sim\; = - + - \overline{S \sim S} \sim$$

et celui de la théorie quasi linéaire

$$(Q.L) = - + - \overline{S - S}(Q.L)$$

ne diffèrent entre eux que par des termes d'ordre K_b^2 : ces termes ne sont pas significatifs car ils sont du même ordre que ceux que l'on a délaissé lorsqu'on a pris $\langle G \rangle \simeq \sim$ en négligeant M' lui aussi d'ordre K_b^2.

7. **La fonction de corrélation des vitesses.** — La fonction de corrélation $\langle G(x, t)\, G(x', t') \rangle$ s'obtient de la même façon que celle qui nous a donné $\langle G(x, t) \rangle$: son développement en conditions initiales est équivalent à une équation intégrale, l'équation de Bethe-Salpeter : celle-ci fait apparaître un opérateur, l'opérateur d'intensité, qui est la somme d'une série infinie de diagrammes.

Dans les problèmes d'instabilité paramétrique on trouve à nouveau qu'un diagramme d'ordre 2 n est de taille K_b^{2n-2} si $(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) > 0$; la convergence pour la théorie quasi linéaire en découle puisque nous avons vu que c'était un cas particulier

$$V_1 = V_2 = v \quad \text{et} \quad V_0 = V_g\,.$$

En introduisant

$$g_{12}(x, v, t, x', v', t') = \langle f(x, v, t)\, f(x', v', t') \rangle - \langle f(x, v, t) \rangle \langle f(x', v', t') \rangle .$$

On trouve à l'ordre le plus bas en $\omega_b\, \tau_c$

$$[\partial_t + v\, \partial_x - \partial_v o(v, t)\, \delta_v]\, [\delta_{t'} + v'\, \partial_{x'} - \partial_{v'} o(v', t')\, \partial_{v'}]\, g_{12} = \frac{q^2}{m^2} \int \mathrm{d}k N_k\, \partial_v\, \partial_{v'} g_{12}\, \mathrm{e}^{i[k(x-x') - \omega_k(t-t')]} +$$
$$+ \frac{q^2}{m^2} \int \mathrm{d}k N_k\, \partial_v\, \partial_{v'} \langle f \rangle \langle f' \rangle\, \mathrm{e}^{i[K(k-x') - \omega_k(t-t')]} \quad (31)$$

avec

$$o(v, t) = \frac{q^2}{m^2} \int_0^t \mathrm{d}t_1 \int \mathrm{d}k_1\, N_{k_1}\, \mathrm{e}^{i[k_1 v - \omega_{k_1}](t-t_1)} .$$

Posant :

$$g_{12}(k, k', \omega, \omega') = g_{12}(k, \omega, \omega')\, \delta(k + k')$$

où $g_{12}(k, k', \omega, \omega')$ est la transformée de Fourier spatio-temporelle de $g_{12}(x, x', t, t')$, l'éq. (31) devient :

$$[i(\omega - kv) - \partial_v D_1(k, v)\, \partial_v]\, [i(\omega' + kv') - \partial_{v'} D_1(-k, v')\, \partial_{v'}]\, g_{12}(k, \omega, \omega') =$$
$$= \frac{q^2}{m^2} \int \mathrm{d}q N_q\, \partial_v\, \partial_{v'} g_{12}[k - q, v, v', (\omega - \omega_q), (\omega' + \omega_q)] + \frac{q^2}{m^2} N_k\, \partial_v\, \partial_{v'} f(\omega - \omega_k)\, f'(\omega' + \omega_k) \quad (32)$$

où $f(\omega)\, f'(\omega)$ sont les transformées de Fourier temporelles de $\langle f(v, t) \rangle$ et $\langle f(v', t') \rangle$ et où

$$D_1(k, v) = \frac{q^2}{m^2} \int \mathrm{d}k_1\, N_{k_1} \left[PP - \frac{i}{\omega_{k_1} - \omega_k - (k_1 - k)\, v} + \pi \delta(\omega_{k_1} - \omega_k - (k_1 - k)\, v) \right] . \quad (33)$$

Dans le domaine résonnant, $\omega_k \simeq kv$, $D_1(v)$ se réduit au coefficient de diffusion de la théorie quasi linéaire $D(v)$. Dans le domaine non résonnant. on peut négliger D_1 et ne retenir que le second terme du second membre de (32). g_{12} est donné par la théorie linéaire à l'ordre le plus bas. Si kv tend vers ω_k, kv' restant très différent de ω_k, l'un des facteurs du premier membre de (32) tend à s'annuler. La dépendance en v' est inchangée par rapport au cas précédent et on peut écrire :

$$g_{12}(k, v, v', \omega, \omega') = g(k, v, \omega)\, \frac{q}{m}\, \sqrt{N_k}\, [i(\omega' + kv')^{-1}\, \partial_{v'} f']$$

avec

$$[i(\omega - kv) + \partial_v D\, \partial_v]\, g(k, v, \omega) = \frac{q}{m}\, \sqrt{N_k}\, \partial_v f .$$

La fonction $g(k, v, \omega)$ se présente comme une résonance élargie de $\Delta v \simeq (D/k)^{1/3}$ et

$$g_k \simeq \frac{q}{m}\, \sqrt{N_k} (k^2\, D)^{-1/3}\, \partial_v f .$$

L'élargissement de résonance s'obtient encore sans renormalisation.

Enfin si kv et $+ kv'$ sont voisins de ω_k, on ne peut plus négliger le premier terme du second membre de (32). En effet, en tenant compte de ce terme et en supposant $\omega_k^* \sim \omega_p$, $k \sim k_0$, $\Delta k \ll k_0$, nous trouvons que g_{2k_0} est du même ordre que g_{k_0} et que g_{2k_0} reporté dans ce terme supplémentaire donne une contribution à la résonance du même ordre que le terme inhomogène proportionnel à $\partial_v\, \partial_{v'} ff'$. Donc si $v \simeq v' \simeq \omega_k/k$, g_k ne se factorise plus en un produit de fonctions de v et de v'. Il apparaît une corrélation dans l'espace des vitesses qui a donné naissance à la notion de *clump*. Il faut noter une fois de plus que la renormalisation des trajectoires est inutile.

8. **Les équations des phases aléatoires.** — Dans le premier cas $(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) > 0$. l'équation de Bethe-Salpeter appliquée aux fonctions $\langle a_i(x, t)\, a_i^*(x', t') \rangle$ donne une série de graphes de taille K_b^{2n-2} où K_b est donné par l'éq. (20).

Les graphes d'ordre $K_b^0 = 1$ s'écrivent :

$$\begin{matrix} a_1 \\ | \\ a_1^* \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{g_1^0} \\ \\ \underline{g_1^0} \end{matrix} + \gamma_0^2 \left(\underline{g_1^0}\, \overbrace{S\ \underline{g_2^0}\ S}^{}{}^* + \overline{g_1^0}\, \underbrace{S^*\ \overline{g_2^0}\ S}_{} \right) \begin{matrix} a_1 \\ | \\ a_1^* \end{matrix} - \gamma_0^4\, \begin{matrix} \underline{g_1^0}\, \overbrace{S\ \underline{g_2^0}\ S}^{}{}^* \\ \overline{g_1^0}\, \underbrace{S^*\ \overline{g_2^0}\ S}_{} \end{matrix} \begin{matrix} a_1^* \\ | \\ a_1 \end{matrix} + \gamma_0^2\, \begin{matrix} \underline{g_1^0} \\ \\ \overline{g_1^0} \end{matrix} \begin{matrix} S^* \\ | \\ S \end{matrix} \begin{matrix} a_2 \\ | \\ a_2^* \end{matrix} \quad (34)$$

où l'on a écrit symboliquement

$$\langle a_1(x, t)\, a_1^*(x', t') \rangle = \overset{a_1}{\underset{a_1^*}{|}} \; ;$$

la ligne supérieure représente la propagation en (x, t) et la ligne inférieure celle en (x', t'). $\langle a_2(x, t)\, a_2^*(x', t') \rangle$ vérifie une équation semblable avec la substitution $(1 \leftrightarrow 2)$ et $(S \leftrightarrow S^*)$.

Dans le second cas $(V_0 - V_1)(V_0 - V_2) < 0$ au contraire il existe une infinité de graphes dans l'équation de Bethe-Salpeter du même ordre $K_b^0 = 1$. La condition supplémentaire $\langle SS \rangle = 0$ ne suffit plus à éliminer les graphes d'ordre supérieur. Cela montre à nouveau que dans des problèmes spatio-temporels on ne peut pas toujours généraliser les approximations valables dans les problèmes à une variable. On est alors obligé pour réduire la taille des graphes de faire appel aux temps de cohérence τ_1 et τ_2 des ondes excitées et non pas seulement à celui τ_c de l'onde de pompe. Ces temps τ_1 et τ_2 seront estimés *a posteriori* à partir de l'équation des phases aléatoires et sont proportionnels à τ_c. Les diagrammes de l'éq. (34) conservent la même taille $K_b^0 = 1$ pourvu que

$$\left| t - t' - \frac{x - x'}{V_1} \right| \ll \tau_1 \quad \text{pour l'onde 1}$$

et

$$\left| t - t' - \frac{x - x'}{V_2} \right| \ll \tau_2 \quad \text{pour l'onde 2} .$$

Quant aux diagrammes délaissés ils sont au plus de taille K_b^2.

En effectuant une transformation de Laplace-Fourier :

$$\langle a_i(x, t)\, a_i^*(x', t') \rangle = \int \mathrm{d}\omega_0\, \mathrm{d}\omega_0'\, \mathrm{d}k_0\, \mathrm{d}k_0' \exp[- i(\omega_0 t + \omega_0' t' - k_0 x - k_0' x')\, A_i(\omega_0, \omega_0', k_0, k_0')]$$

l'éq. (34) s'écrit

$$\left[D_1(\omega_0, k_0) - \gamma_0^2 \int \frac{\Sigma(\omega_1)\, \mathrm{d}\omega_1}{D_2\left(\omega_0 - \omega_1, k_0 - \frac{\omega_1}{V_0}\right)} \right] \left[D_1(\omega_0', k_0') - \gamma_0^2 \int \frac{\Sigma(\omega_1')\, \mathrm{d}\omega_1'}{D_2\left(\omega_0' - \omega_1', k_0' - \frac{\omega_1'}{V_0}\right)} \right] A_1 =$$

$$= A_1^0 + \gamma_0^2 \int \Sigma(\omega_1)\, \mathrm{d}\omega_1\, A_2\left(\omega_0 - \omega_1, \omega_0' + \omega_1, k_0 - \frac{\omega_1}{V_0}, k_0' + \frac{\omega_1}{V_0}\right) \quad (35)$$

dans laquelle A_1^0 désigne le terme de condition initiale, $\Sigma(\omega_1)$ le spectre de la fonction de corrélation de l'onde de pompe

$$\Sigma(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\tau \varphi(\tau) \exp[i\omega_1 \tau] , \quad \text{et} \quad D_i(\omega, k) = - i(\omega - kv_i + iv_i) .$$

En passant aux variables lentes $\omega_0 + \omega_0' = 2\,\Omega$, $k_0 + k_0' = 2\,K$ et rapides $\omega_0 - \omega_0' = 2\,\omega$, $k_0 - k_0' = 2\,k$, en posant

$$H = - \frac{\gamma_0^2}{2} \int \frac{\Sigma(\omega_1)\, \mathrm{d}\omega_1}{D_2\left(\omega_0 - \omega_1, k_0 - \frac{\omega_1}{V_0}\right)} , \qquad H' = - \frac{\gamma_0^2}{2} \int \frac{\Sigma(\omega_1')\, \mathrm{d}\omega_1'}{D_2\left(\omega_0' - \omega_1', k_0 - \frac{\omega_1'}{V_0}\right)}$$

l'éq. (35) s'écrit :

$$(D_1 + H + H')\, A_1 =$$

$$= \frac{D_1 + H + H'}{(D_1 + H + H')^2 + [\omega - kV_1 + i(H - H')]^2} \left[A_1^0 + \gamma_0^2 \int \mathrm{d}\omega_1\, \Sigma(\omega_1)\, A_2\left(\Omega, K, \omega - \omega_1, k - \frac{\omega_1}{V_0}\right) \right] . \quad (36)$$

Pourvu que

$$| D_2(\Omega, K) | \ll \Delta\omega_0 \left| 1 - \frac{V_2}{V_0} \right| ,$$

on peut écrire

$$H = -\frac{\gamma_0^2}{2}\int \Sigma(\omega_1)\,\mathrm{d}\omega_1 \left\{ PP\left(\frac{-i}{\omega_1\left(1-\frac{V_2}{V_0}\right)-(\omega-kV_2)}\right)+ \right.$$

$$\left. + \pi\,\delta\left[\omega_1\left(1-\frac{V_2}{V_0}\right)-(\omega-kV_2)\right]\right\} \quad \text{et} \quad H' = H^* . \qquad (37)$$

D'autre part comme A_1 s'annule pour $|x - x'| \to +\infty$ et $|t - t'| \to +\infty$, ω et k peuvent être pris réels et l'hypothèse de temps de corrélation court pour A, entraîne l'existence d'un large spectre $\Delta\omega_1$, Δk_1 en ω et k. Plus exactement si on suppose

$$\Delta\omega_1 \gg |D_1(\Omega, K) + H + H'| , \qquad (38)$$

on peut à nouveau faire la même approximation que (37) pour obtenir :

$$(D_1 + H + H')\,A_1 = \pi\,\delta(\omega - kV_1)\left[A_1^0 + \gamma_0^2\int \Sigma(\omega_1)\,\mathrm{d}\omega_1\,A_2\left(\Omega, K, \omega-\omega_1, k-\frac{\omega_1}{V_0}\right)\right] . \qquad (39)$$

Nous avons supprimé le terme $i(H - H')$ dans l'argument de la fonction δ : il traduit une variation non linéaire de fréquence, qui n'est pas significative à cet ordre du développement. En posant

$$A_i(\Omega, K, \omega, k) = \delta(\omega - kV_i)\,N_i(\Omega, K, k) \qquad (40)$$

et en revenant aux variables

$$T = \frac{t+t'}{2} \quad \text{et} \quad X = \frac{x+x'}{2}$$

on a donc démontré les équations des phases aléatoires :

$$\begin{cases} (\partial_T + V_1\,\partial_x + 2\,\nu_1)\,N_1(X, T, k) = N_1^0\,\delta(T) + 2\,\pi\gamma_0^2\displaystyle\int \mathrm{d}\omega_0\,\Sigma(\omega_0)\,\times \\ \qquad \times\,\delta\left[\omega_0\left(1-\dfrac{V_2}{V_0}\right)-k(V_1-V_2)\right]\left[N_1(k)+N_2\left(k-\dfrac{\omega_0}{V_0}\right)\right] \qquad (41a) \\ (\partial_T + V_2\,\partial_x + 2\,\nu_2)\,N_2(X, T, k) = N_2^0\,\delta(T) + 2\,\pi\gamma_0^2\displaystyle\int \mathrm{d}\omega_0\,\Sigma(\omega_0)\,\times \\ \qquad \times\,\delta\left[\omega_0\left(1-\dfrac{V_1}{V_0}\right)-k(V_2-V_1)\right]\left[N_2(k)+N_1\left(k-\dfrac{\omega_0}{V_0}\right)\right] \qquad (41b) \end{cases}$$

les termes N_i^0 sont les termes de condition initiale :

$$N_i(x, t=0, k) = \frac{1}{2\,\pi}\int \mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}x_0'\,\exp[-ik(x_0 - x_0')]\,\delta\left(x - \frac{x_0+x_0'}{2}\right)a_i^0(x_0)\,a_i^{0*}(x_0')$$

où

$$a_i^0(x_0) = a_i(x_0, t=0) .$$

Nous avons donc démontré les équations des phases aléatoires sans hypothèses *ad hoc* comme celles habituellement faites [13] :

1) La factorisation des fonctions de corrélation à quatre ondes.

2) Un ordre de grandeur des fonctions de corrélation d'ordre n posé *a priori*.

3) Les dépendances lentes et rapides en temps et espace des fonctions de corrélation supposées à l'avance de la forme :

$$\langle a_i(x, t)\,a_i^*(x', t')\rangle = \int \mathrm{d}k\,\exp[ik(x - x' - V_1(t-t')]\,N_i\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{t+t'}{2}, k\right) .$$

Cette forme résulte en fait des éq. (39) et (40) qui sont une conséquence de la condition (38).

Les équations finales (41) permettent d'estimer τ_1 et $\Delta\omega_1 = \tau_1^{-1}$ pour établir les conditions de validité. $\Delta\omega_1$ et $\Delta\omega_2$ sont en effet reliés à $\Delta\omega_0 = \tau_c^{-1}$ par les conditions de résonance :

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \\ k_0 = k_1 + k_2 \end{cases}$$

qui donnent

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_0 \left| \frac{V_1(V_0 - V_2)}{V_0(V_1 - V_2)} \right| .$$

On peut alors rassembler toutes les conditions de validité sous la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{c} \left| \dfrac{1}{N_1} (\partial_t N_1 + V_1 \, \partial_x N_1 + 2 \, \nu_1 \, N_1) \right| \ll \Delta\omega_0 \left| 1 - \dfrac{V_1}{V_0} \right| \\ \left| \dfrac{1}{N_2} (\partial_t N_2 + V_2 \, \partial_x N_2 + 2 \, \nu_2 \, N_2) \right| \ll \Delta\omega_0 \left| 1 - \dfrac{V_2}{V_0} \right| \\ \dfrac{\gamma_0^2}{\Delta\omega_0^2 \left| 1 - \dfrac{V_1}{V_0} \right| \left| 1 - \dfrac{V_2}{V_0} \right|} \ll 1 \end{array} \right\} . \tag{42}$$

Nous pouvons maintenant à l'aide des éq. (41) calculer les seuils et taux de croissance des instabilités paramétriques. La relation de dispersion de la composante la plus instable N_1 $(x, t, k = 0)$ est :

$$(\Omega - KV_1 + 2 \, i\nu_1)(\Omega - KV_2 + 2 \, i\nu_2) = \frac{2 \, i\gamma_0^2}{\Delta\omega_0} \left(\frac{\Omega - KV_1 + 2 \, i\nu_1}{\eta_1} + \frac{\Omega - KV_2 + 2 \, i\nu_2}{\eta_2} \right) \tag{43}$$

avec

$$\eta_i = \left| 1 - \frac{V_i}{V_0} \right| .$$

Le seuil des instabilités s'écrit :

$$\gamma_0^2 = \Delta\omega_0 \, \eta_1 \, \eta_2 \, \mathrm{Min} \left(\frac{\nu_1}{\eta_1}, \frac{\nu_2}{\eta_2} \right)$$

et la condition de validité est

$$\Delta\omega_0 > \mathrm{Max} \left(\frac{\nu_1}{\eta_1}, \frac{\nu_2}{\eta_2} \right) .$$

A la limite de validité des équations incohérentes on retrouve alors le seuil cohérent $\gamma_0^2 = \upsilon_1 \, \upsilon_2$ de sorte qu'il n'y a pas de régime intermédiaire entre le cas cohérent et incohérent.

Par ailleurs on trouve que lorsque la valeur quadratique est instable l'une des deux valeurs moyennes $\langle a \rangle$ l'est.

Au contraire pour les instabilités absolues, lorsque $V_1 \, V_2 < 0$, les seuils d'instabilité de $\langle aa^* \rangle$ et $\langle a \rangle$ sont essentiellement différents. Le seuil obtenu à partir de (43) s'écrit

$$\gamma_0^2 = \Delta\omega_0 \left[\frac{\nu_1}{| V_1 |} + \frac{\nu_2}{| V_2 |} \right] \times$$
$$\times \frac{| V_1 \, V_2 | \, \eta_1 \, \eta_2}{[\eta_1^{1/2} \, | V_2 |^{1/2} + \eta_2^{1/2} \, | V_1 |^{1/2}]^2} .$$

Prenons $V_0 = \infty$ qui traduit bien le problème de la rétrodiffusion d'une onde laser avec :

$$V_1 \simeq c , \qquad V_2 = C_s , \qquad \frac{\nu_1}{| V_1 |} \ll \frac{\nu_2}{| V_2 |} \tag{44}$$

l'expression du seuil pour $\langle aa^* \rangle$ est alors

$$\gamma_0^2 = \Delta\omega_0 \, \nu_2 \tag{45}$$

et la condition de validité s'écrit

$$\Delta\omega_0 \gg \nu_2 \left| \frac{V_1}{V_2} \right|$$

le seuil de $\langle a \rangle$ est dans les mêmes conditions

$$\gamma_0^2 = \Delta\omega_0^2 \left| \frac{V_1}{V_2} \right|$$

toujours supérieur à (45).

Enfin, on ne trouve dans aucun cas une discontinuité entre le cas cohérent et le cas incohérent ; cependant la cohérence ou l'incohérence du problème dépend de la nature de l'instabilité considérée (convective ou absolue) ; par exemple pour $V_0 = \infty$ avec les conditions (44), dans le régime

$$\text{Max}\,(\nu_1, \nu_2) < \Delta\omega_0 < \nu_2 \left| \frac{V_1}{V_2} \right|$$

l'incohérence de l'onde de pompe modifie le seuil de l'instabilité convective bien qu'il n'affecte pas celui des instabilités absolues.

8. **Conclusion.** — A l'aide des versions linéarisées d'équations non linéaires on a pu faire ressortir les caractéristiques de la turbulence faible des plasmas : on dispose d'un petit paramètre K_b qui permet de faire un développement systématique à tout ordre. En particulier nous avons montré qu'il n'était pas nécessaire de renormaliser les équations quasi linéaires et que l'élargissement de résonance apparaissait naturellement dans l'étude de la fonction de corrélation des vitesses. Par ailleurs nous avons indiqué que les approximations usuelles dans les problèmes à une variable n'étaient pas toujours transposables aux cas spatio-temporels. Nous avons discuté les transitions cohérent-incohérent dans les problèmes d'instabilité paramétrique. A cette occasion nous avons pu établir les conditions de validité de l'approximation des phases aléatoires. Ces conditions sont assez faciles à obtenir sur des bases intuitives lorsque les amortissements des ondes sont négligeables et lorsque les vitesses de groupe des ondes sont toutes du même ordre de grandeur. Par contre, il était absolument nécessaire d'en faire une étude rigoureuse lorsqu'interagissent par exemple ondes ioniques et ondes électromagnétiques dont les vitesses de groupe diffèrent de plusieurs ordres de grandeur.

Bibliographie

[1] KRAICHNAN, R. H., *J. Math. Phys.* **2** (1961) 124.
FRISCH, U., LESIEUR, M., BRISSAUD, A., *J. Fluid Mech.* **65** (1974) 145 et références contenues dans cet article.

[2] LAVAL, G., PELLAT, R., PESME, D., *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 192.

[3] MISGUICH, J. H., BALESCU, R., *J. Plasma Phys.* **13** (1975) 429 et références contenues dans cet article.
PELLETIER, G., POMOT, C., *J. Plasma Phys.* **14** (1975) 153.
PEYRAUD, N., COSTE, J., *J. Plasma Phys.* **12** (1974) 177.

[4] BOURRET, R., *Nuovo Cimento* **26** (1962) 1.

[5] FRISCH, U., *in Probabilistic Method in Applied Mathematics*, edited by (A. T. Bharucha Reid Academic, New York) 1968.

[6] BRISSAUD, A., FRISCH, U., *J. Math. Phys.* **15** (1974) 524.
KUBO, P., *J. Math. Phys.* **4** (1963) 174.

[7] THOMSON, J. J., KARUSH, J. I., *Phys. Fluids* **17** (1974) 1608.
THOMSON, J. J., *Nucl. Fusion* **15** (1975) 237.

[8] LAVAL, G., PELLAT, R., PESME, D., RAMANI, A., ROSENBLUTH, M. N., WILLIAMS, E., To be published in *Phys. Fluids*.

[9] VEDENOV, A. A., VELIKHOV, E. P., SAGDEEV, R. Z., *Nucl. Fusion Suppl.* Pt. **2** (1962) 465.
DRUMMOND, W. E., PINES, D., *Nucl. Fusion Suppl.* Pt. **3** (1962) 1049.

[10] ROLLAND, P., *J. Plasma Phys.* **12** (1974) 455.

[11] WEINSTOCK, J., *Phys. Fluids* **12** (1969) 1045.
THOMSON, J. J., BENFORD, G., *J. Math. Phys.* **14** (1973) 531.

[12] KADOMTSEV, B. B., *Plasma Turbulence* (Academic) 1965.
DUPREE, T. H., *Phys. Fluids* **9** (1966) 1773.
AAMODT, R. E., *Phys. Fluids* **10** (1967) 1245.

[13] TSYTOVITCH, V. N., *Non linear Effects in Plasma* (Plenum, New York) 1970.
DAVIDSON, R. C., *Methods in non linear Theory* (Academic, New York) 1972.